

Q.1. En los apuntes.

Q.2. Cada relación  $R_1$  no es transitiva ya que, por ejemplo,

$$\begin{array}{l} 1122 R_1 2233 \\ 2233 R_1 3344 \end{array} \quad \text{pero} \quad 1122 \not R_1 3344$$

Por tanto no puede ser de equivalencia ni de orden.

Q.3.  $R_2$  no es simétrica, ya que, por ejemplo,

$$1111 R_2 1122 \quad \text{pero} \quad 1122 \not R_2 1111$$

Por tanto no es de equivalencia.

$R_2$  no es antisimétrica, ya que, por ejemplo

$$\begin{array}{l} 1122 R_2 2211 \\ 2211 R_2 1122 \end{array} \quad \text{pero} \quad 1122 \neq 2211$$

Por tanto no es de orden.

Q.3. Q.4 Definimos  $a$  y  $b$  a la vez.

1º Si  $\varphi$  es atómica,  $b(\varphi) := 0$

Si  $p$  es símbolo de proposición atómica,  $a(p) := 1$

$$a(\top) = a(\perp) := 0$$

2º Si  $\varphi$  es fórmula,

$$b(\neg\varphi) := b(\varphi)$$

$$a(\neg\varphi) := a(\varphi)$$

3º Si  $\varphi, \psi$  son fórmulas, o conectiva binaria

$$b(\varphi \circ \psi) := b(\varphi) + b(\psi) + 1$$

$$a(\varphi \circ \psi) := a(\varphi) + a(\psi)$$

① Para fórmulas atómicas:

$$a(\varphi) = 1 \leq b(\varphi) + 1 = 0 + 1 \quad \text{SE CUMPLE.}$$

② H.I.:  $\varphi$  cumple  $a(\varphi) \leq b(\varphi) + 1$ .

Veamos que  $\neg\varphi$  cumple la desigualdad.

$$a(\neg\varphi) \stackrel{\text{DEF.}}{=} a(\varphi) \stackrel{\text{H.I.}}{\leq} b(\varphi) + 1 \stackrel{\text{DEF.}}{=} b(\neg\varphi) + 1. \quad \text{SE CUMPLE.}$$

③ H.I.:  $\varphi, \psi$  cumplen la desigualdad.

Veamos que  $\varphi \circ \psi$  también la cumple.

$$\begin{aligned} a(\varphi \circ \psi) &\stackrel{\text{DEF.}}{=} a(\varphi) + a(\psi) \stackrel{\text{H.I.}}{\leq} b(\varphi) + 1 + b(\psi) + 1 = \\ &\stackrel{\text{DEF.}}{=} b(\varphi \circ \psi) + 1 \quad \text{SE CUMPLE.} \end{aligned}$$

④ llamemos **I** a la propiedad " $\varphi$  cumple la igualdad  $a(\varphi) = b(\varphi) + 1$ ".

① De las fórmulas atómicas:

~~se muestra~~ Si  $\varphi = p$  proposición atómica,

entonces  $\varphi$  cumple **I**

$$\text{ya que } a(\varphi) = \underline{1} = \underbrace{b(\varphi)}_{0} + 1$$

Si  $\varphi = \top$  o  $\varphi = \perp$ ,  $\varphi$  no cumple **I**.

② Si  $\varphi$  cumple **I**  $\Rightarrow \neg\varphi$  cumple **I**

Si  $\varphi$  no cumple **I**  $\Rightarrow \neg\varphi$  no cumple **I**

Esto es porque negar una fórmula no altera las funciones  $a$  y  $b$ .



Sin embargo  $\varphi_2 \models \varphi_1$ .

Veámoslo: si  $v$  es contraejemplo de  $\varphi_1 \Rightarrow$

$$v(g) = \perp$$

$$v(a \vee d) = 0 \Rightarrow v(a) = v(d) = 0$$

Es decir  $g:1$

$a:0$

$d:0$

es el único contraejemplo de  $\varphi_1$ .

Esta valoración también es contraejemplo de  $\varphi_2$ .

Por tanto todo modelo de  $\varphi_2$  también lo es de  $\varphi_1$ .

luego  $\varphi_2 \models \varphi_1$

(FS)

1.  $\neg (q \vee r)$  Pr.
2.  $\neg$  E1,1
3.  $q \vee r$  E1,1.

conc:

$$(\neg q) \vee (\neg r)$$

- |                                  |
|----------------------------------|
| 4. $q$ Pr. aux.                  |
| 5. $\neg q$ I1,2,4.              |
| 6. $(\neg q) \vee (\neg r)$ IV,5 |

$$7. q \rightarrow (\neg q) \vee (\neg r) \text{ I} \rightarrow (4-6)$$

- |                                    |
|------------------------------------|
| 8. $r$ Pr. aux.                    |
| 9. $\neg r$ I1,2,8                 |
| 10. $(\neg q) \vee (\neg r)$ IV,9. |

$$11. r \rightarrow (\neg q) \vee (\neg r) \text{ I} \rightarrow (8-10).$$

$$12. (\neg q) \vee (\neg r) \text{ EV, 3, 7, 11}$$

1.  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  Pr.

Conc.  
 $p \wedge (q \vee r)$

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| 2. $p \wedge q$          | Pr. aux.   |
| 3. $p$                   | $E1, 2$    |
| 4. $q$                   | $E1, 2$    |
| 5. $q \vee r$            | $I4, 4$    |
| 6. $p \wedge (q \vee r)$ | $I1, 3, 5$ |

7.  $p \wedge q \rightarrow p \wedge (q \vee r)$   $I \rightarrow (2-6)$

|                           |             |
|---------------------------|-------------|
| 8. $p \wedge r$           | Pr. aux.    |
| 9. $p$                    | $E1, 8$     |
| 10. $q$                   | $E1, 8$     |
| 11. $q \vee r$            | $I10, 10$   |
| 12. $p \wedge (q \vee r)$ | $I1, 9, 11$ |

13.  $p \wedge r \rightarrow p \wedge (q \vee r)$   $I \rightarrow (8-12)$

14.  $p \wedge (q \vee r)$   $E1, 1, 7, 13.$

1.  $p \rightarrow q \vee r$  Pr
2.  $\neg(r \wedge p)$  Pr
3.  $\neg p \rightarrow s$  Pr
4.  $\neg s \vee q$  Pr.

Conc:  $q$

|                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| 5. $\neg q$             | Pr. aux.              |
| 6. $\neg s$             | $T29, 5, 4.$          |
| 7. $p$                  | $T28, 6, 3$           |
| 8. $\neg r \vee \neg p$ | $T8, 2$               |
| 9. $\neg r$             | $T29, 7, 8$           |
| 10. $q \vee r$          | $E \rightarrow, 7, 1$ |
| 11. $q$                 | $T29, 10, 9$          |
| 12. $q \wedge \neg q$   | $I1, 5, 11$           |

13.  $\neg q \rightarrow q \wedge \neg q$   $I \rightarrow (5-12)$

14.  $\neg \neg q$   $I7, 13$

15.  $q$   $E7, 14$